Módulo 04
Aritmética de Punto Fijo
(Pt. 1)

Organización de Computadoras
Depto. Cs. e Ing. de la Comp.
Universidad Nacional del Sur

Copyright

Contenidos

- Clasificación de las operaciones
- Codificación decimal en binario (**BCD**)
- Representación **SM**
- Representación **RC**
- Representación **DRC**
- Operaciones de suma y de resta
- Detección de overflow
- Otras codificaciones

Tipos de operaciones

- Las operaciones aritméticas se clasifican en tres grandes categorías:
  - Operaciones aritméticas estándares
  - Funciones aritméticas elementales
  - Operaciones pseudo-aritméticas
- A su vez, se dispone esencialmente de dos modos de operación:
  - Operación en punto fijo
  - Operación en punto flotante

Tipos de operaciones

- Operaciones aritméticas estándares:
  - Esta categoría incluye las cuatro funciones aritméticas primitivas: suma, resta, multiplicación y división, tanto en punto fijo como en punto flotante
  - Toda otra función matemática podrá ser expresada como una composición de estas cuatro operaciones

Tipos de operaciones

- Funciones aritméticas elementales:
  - Esta categoría incluye aquellas operaciones usadas frecuentemente en cómputos matemáticos, tales como exponencial, raíz cuadrada, funciones trigonométricas, hiperbólicas, etc.
  - No todas las computadoras implementan estas funciones en hardware, en general se suelen implementar en firmware (microcódigo) o bien directamente como software en una librería.

Tipos de operaciones

- Operaciones pseudo-aritméticas:
  - Estas categoría incluye operaciones que requieren un cierto grado de cálculo aritmético, pero están relacionadas con la ejecución de un programa
- Consta de dos subcategorías:
  - Aritmética de direccionamiento: operaciones relacionadas al cómputo de la dirección efectiva en memoria de los datos
  - Aritmética de edición de datos: operaciones lógicas y de transformación de datos tales como, load/store, empaquetado/desempaquetado, etc.

Modos de operación

- Operación en punto fijo:
  - Este modo de operación es usado en problemas comerciales o cálculos estadísticos y se caracteriza por tener el punto decimal en una posición prefijada
- Consta de dos subcategorías:
  - Operación entera: los resultado se alinean en el extremo derecho, como si el punto decimal ocupara esa posición
  - Operación fraccionaria: los resultados se alinean en el extremo izquierdo, como si el punto decimal ocupara esa posición

Modos de operación

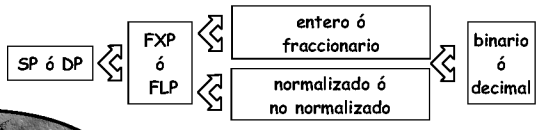
- Operación en punto flotante:
  - Este modo de operación es usado en problemas de tipo ingenieril o científico, donde frecuentemente se requiere escalamiento para manejar tanto magnitudes muy grandes como muy pequeñas
- Consta de dos subcategorías:
  - Operación normalizada: el resultado de toda operación es normalizado antes de ser retornado
  - Operación no normalizada: el resultado de toda operación es retornado tal cual fuera obtenido

Precisión de las operaciones

- Las instrucciones aritméticas también pueden ser clasificadas de acuerdo a su precisión:
  - Precisión simple (**SP**): se refiere a las operaciones definidas sobre operandos de tamaño estándar, esto es, con operando de longitud igual a una palabra
  - Precisión doble (**DP**): se refiere a las operaciones definidas sobre operandos de tamaño doble, esto es, con operandos de longitud igual a dos palabras
  - Triple, cuádruple y las restantes precisiones pueden definirse de manera análoga

Binario vs. decimal

- Algunas arquitecturas ofrecen la posibilidad de operar directamente sobre la base decimal
  - La conversión (operaciones de pack y de unpack), requiere de instrucciones para manejar los datos directamente en formato decimal
  - Por caso, la instrucción **ADD** puede hacer referencia a **16** operaciones aritméticas distintas, a saber:



Codificación de dígitos

- Para codificar cada dígito decimal es necesario hacer uso de **k** bits, donde:

$$k = \lceil \log_2 10 \rceil = 4$$

- Es posible postular múltiples codificaciones para cada dígito decimal haciendo uso de esos bits. Por ejemplo:

0	0000	0000	0011	0000
1	0001	0001	0100	0001
2	0010	0011	0101	0011
3	0011	0111	0110	0101

Código BCD-2421

- El código **BCD-2421** denota en su nombre el peso asignado a cada posición en la codificación
  - Se trata de un sistema posicional
  - Presenta una línea de simetría por autocomplementación
  - Esta característica facilita el cómputo de la diferencia entre magnitudes de igual signo y la suma de magnitudes de distinto signo

	2421
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	1011
6	1100
7	1101
8	1110
9	1111

Código BCD-8421

- El código **BCD-8421** codifica cada dígito decimal directamente en binario
  - También se lo conoce como código **BCD** natural
  - Se trata de un sistema posicional
  - El peso de cada posición coincide con las sucesivas potencias de dos
  - No es posible encontrar ninguna línea de simetría que resulte de utilidad

	8421
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Código BCD exceso-3

- El código **BCD** exceso-3 también codifica cada dígito decimal en binario, si bien les suma previamente un exceso
  - Producto del exceso, deja de ser un sistema posicional
  - Como se puede apreciar, resulta simétrico por autocomplementación
  - En esta codificación el acarreo binario coincide con el acarreo decimal

	----
0	0011
1	0100
2	0101
3	0110
4	0111
5	1000
6	1001
7	1010
8	1011
9	1100

Código Gray

- El código Gray es simétrico por construcción
  - También se lo conoce como código progresivo cíclico
  - Se trata de una codificación no posicional
  - Como se puede observar presenta múltiples líneas de simetría
  - Nótese que entre la codificación de un dígito y el siguiente se modifica a lo sumo un bit

	----
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101

Aritmética de punto fijo

- Recordemos que elegida una base **r** y una precisión **p** (cantidad de dígitos), el aporte de cada dígito al valor denotado depende exclusivamente de su posición
  - La idea es que los primeros **n** dígitos denoten la parte entera y los restante **k** dígitos la parte fraccionaria
  - La elección de **n** y de **k** tiene como efecto colateral fijar la posición del punto decimal, razón por la cual hablamos de aritmética de punto fijo (**FXP**)
  - Usualmente, $n = 0$ o bien $k = 0$

Aritmética de punto fijo

- Un número signado representará una magnitud positiva o negativa, pero no ambas
  - Usualmente se reserva el dígito de más a la izquierda (esto es, el más significativo), para denotar el signo
  - De los **r** dígitos válidos sólo se han de utilizar dos para codificar el signo
  - Por caso, sea $X = (d_{n-1}, \ldots, d_1, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k})_r$ un número representado en una base **r**, entonces:

$$d_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{cuando } X \geq 0 \\ r-1 & \text{cuando } X < 0 \end{cases}$$

Aritmética de punto fijo

- Las posiciones del punto decimal y del signo dependerán de **n** y de **k**
  - Cuando **k = 0**, el signo se ubica en el extremo izquierdo y el punto decimal en el extremo derecho
  - Cuando **n = 0**, el signo se ubica en el extremo izquierdo y el punto decimal inmediatamente a su derecha (justo antes del primer dígito fraccionario)
  - La conversión entre estas dos variantes es sencilla, basta con multiplicar o dividir por una potencia de **r**

Aritmética de punto fijo

- La representación interna del punto decimal es implícita, no requiere reservar espacio de almacenamiento
- Para representar un número positivo, todos los dígitos salvo el de signo codifican su magnitud
  - Todas las representaciones que estudiaremos coinciden al codificar número positivos
- En cambio, para representar a un número negativo aparecen múltiples alternativas

Signo-magnitud (SM)

- Esta representación es análoga a la utilizada cotidianamente, donde la ausencia de signo representa un número positivo, y la presencia del signo **–** representa a un número negativo
- En la codificación signo-magnitud, el dígito de signo toma el valor **0** en los positivos y **r-1** en los negativos
- Nótese que **+0** y **-0** denotan al mismo valor, por lo que la representación del cero no es única

Signo-magnitud (SM)

- Sea $\overline{X}$ el complemento de un dado número **X**
- En esta representación, $\overline{X}$ y **X** difieren sólo en el dígito que codifica al signo
  - Comprobemos esta situación con un ejemplo para una base **r = 2** y con una precisión **n = 8**:

$(00101011)_2 = +(43)_{10}$ $\quad (10101011)_2 = -(43)_{10}$
$(01111111)_2 = +(127)_{10}$ $\quad (11111111)_2 = -(127)_{10}$
$(00000000)_2 = +(0)_{10}$ $\quad (10000000)_2 = -(0)_{10}$

Signo-magnitud (SM)

- ¿Qué rango de representación brinda usar **SM** con **n** dígitos en una base **r**?
  - El menor número posible es $(r\text{-}1\ r\text{-}1\ r\text{-}1 \ldots r\text{-}1)_r$
  - El mayor número posible es $(0\ r\text{-}1\ r\text{-}1 \ldots r\text{-}1)_r$
  - Es decir, el rango de representación para signo-magnitud es $[-(r^{n-1}-1),\ r^{n-1}-1]$
- Por caso, para una base **r = 2**, con **n = 8** dígitos binarios, el rango se calcula como:
  - $[-(2^7-1),\ 2^7-1] = [-127,\ 127]$

Complemento a la base (RC)

- Las computadoras suelen hacer uso de algún esquema de complementación para representar a los números negativos
  - Esto simplifica las operaciones suma de números de distintos signo, o lo que es lo mismo, de resta de números de igual signo
- Imaginemos el odómetro de una moto que queremos vender. Le pedimos a un mecánico amigo que le “rebobine” el odómetro, pero él se descuida y se pasa de largo... ¿qué sucede?

Complemento a la base (RC)

- Supongamos que el odómetro tiene sólo tres dígitos (a manera de simplificación)
- ¿Qué sucede al tratar de retroceder **5** Km estando inicialmente en el Km **003**?

003 → 002 → 001 → 000 → 999 → 998

  - En algún sentido, **998** tiene que representar al número **-2**
  - Nótese que al sumar un valor positivo con su complemento negativo, se obtiene siempre el mismo resultado... ¿cuál es ese valor? ¿y al tener **n** dígitos?

Complemento a la base (RC)

- El resultado anterior permite determinar en general el valor de $\overline{X}$ para cualquier **X**
  - Como comprobamos, $X + \overline{X} = r^n$, por lo que despejando $\overline{X}$ nos queda $\overline{X} = r^n - |X|$
  - No es conveniente tener que computar una resta toda vez que se desee saber qué valor representa un cierto número negativo en complemento a la base
  - Por suerte, como $r^n = (r^n - 1) + 1$, se puede expresar a $\overline{X}$ como $\overline{X} = ((r^n - 1) - |X|) + 1$
  - Obsérvese que $r^n - 1$ es un número especial, está compuesto de **n** dígitos iguales, de valor **r-1**

Complemento a la base (RC)

- En síntesis, el mecanismo simplificado para expresar un cierto número negativo en complemento a la base consiste en:
  - Primero expresar el valor absoluto del número en cuestión en el sistema complemento a la base (que por tratarse de un número positivo coincide con su representación en **SM**)
  - Complementar cada dígito del número, esto es, reemplazar cada dígito d_i por el valor $(r-1) - d_i$ (nótese que el signo también es complementado)
  - Finalmente, incrementar en **1** el valor obtenido

Complemento a la base (RC)

- Para $r = 2$ y $n = 8$ se desea saber qué valores codifican las siguientes cadenas de bits:
  - Cuando el bit de signo es **0**, la cosa es fácil:

    $(00001111)_2 = +(15)_{10}$ $(01001101)_2 = +(77)_{10}$
    $(01111111)_2 = +(127)_{10}$ $(00000000)_2 = +(0)_{10}$
  - En cambio, si el bit de signo es **1**, se trata de un número negativo el cual se debe complementar:

    $(10001111)_2 =$ $(10000000)_2 =$
    $-[(01110000)_2 + 1] =$ $-[(01111111)_2 + 1] =$
    $-(113)_{10}$ $-(128)_{10}$

Complemento a la base (RC)

- ¿Qué rango de representación brinda usar complemento a la base **r** con **n** dígitos?
  - El menor número posible es $(r\text{-}1\ 0\ 0 \ldots 0)_r$
  - El mayor número posible es $(0\ r\text{-}1\ r\text{-}1 \ldots r\text{-}1)_r$
  - Es decir, el rango de representación en complemento a la base es $[-r^{n-1},\ r^{n-1} - 1]$
- Por caso, para una base $r = 2$, con $n = 16$ dígitos binarios, el rango se calcula como:
  - $[-2^{15},\ 2^{15} - 1] = [-32768,\ 32767]$

Complemento a la base disminuida (DRC)

- Recordemos que al representar un número negativo en complemento a la base debemos incrementar en **1** luego de complementar
  - Esta operación puede ser costosa en tiempo de ejecución, sobre todo si existen múltiples acarreos
  - Una posibilidad para evitar esta operación consiste en representar los números negativos haciendo uso del complemento a la base disminuida
  - Por caso, para un cierto número positivo **X**, su complemento a la base disminuida $\overline{X}$ se calcula directamente como $\overline{X} = (r^n - 1) - |X|$

Complemento a la base disminuida (DRC)

- Volviendo al ejemplo del odómetro, el valor representado se debe retrasar una unidad (ya que falta tener en cuenta el incremento final)

  `0003` → `0002` → `0001` → `0000` → `9999` → `9998` → `9997`

  `+3` → `+2` → `+1` → `+0` → `-0` → `-1` → `-2`

- Como se puede apreciar existen nuevamente dos representaciones para el cero:
  - $+0 = (0\ 0 \ldots 0\ 0)_r$
  - $-0 = (r\text{-}1\ r\text{-}1 \ldots r\text{-}1\ r\text{-}1)_r$

Complemento a la base disminuida (DRC)

- El mecanismo simplificado para expresar un cierto número negativo en complemento a la base disminuida ahora consiste en:
  - Primero expresar el valor absoluto del número en cuestión en el sistema complemento a la base disminuida (que por tratarse de un número positivo coincidirá con su representación en signo-magnitud y en complemento a la base)
  - Finalmente, complementar cada dígito del número, esto es, reemplazar cada dígito $\mathbf{d_i}$ por el valor $\mathbf{(r\text{-}1) - d_i}$ (el signo también es complementado)

Complemento a la base disminuida (DRC)

- Para la base $\mathbf{r = 2}$ se desea saber qué números codifican las siguientes cadenas de bits:
  - Cuando el bit de signo es **0**, la cosa sigue siendo fácil:

    $(00001111)_2 = +(15)_{10}$ $\quad$ $(01001101)_2 = +(77)_{10}$

    $(01111111)_2 = +(127)_{10}$ $\quad$ $(00000000)_2 = +(0)_{10}$
  - En cambio, si el bit de signo es **1**, se trata de un número negativo el cual se debe complementar:

    $(10001111)_2 =$ $\quad$ $(10000000)_2 =$

    $-(01110000)_2 =$ $\quad$ $-(01111111)_2 =$

    $-(112)_{10}$ $\quad$ $-(127)_{10}$

Complemento a la base disminuida (DRC)

- ¿Qué rango brinda usar complemento a la base disminuida con **n** dígitos para una base **r**?
  - El menor número es $(r\text{-}1\ 0\ 0 \ldots 0)_r$
  - El mayor número es $(0\ r\text{-}1\ r\text{-}1 \ldots r\text{-}1)_r$
  - Es decir, el rango de representación en complemento a la base disminuida es $[-(r^{n-1} - 1),\ r^{n-1} - 1]$
- Por caso, para una base $r = 2$, con $n = 16$ dígitos binarios, el rango se calcula como:
  - $[-(2^{15} - 1),\ 2^{15} - 1] = [-32767,\ 32767]$

Ejemplo comparativo

- A manera de comparación, contrastemos la representación del número $(547)_{10}$ usando $n = 16$ dígitos y una base $r = 2$
  - Tener en cuenta que $(547)_{10} = (1000100011)_2$

signo-magnitud	0000001000100011	
complemento a 1	0000001000100011	$+(547)_{10}$
complemento a 2	0000001000100011	
	1000001000100011	signo-magnitud
$-(547)_{10}$	1111110111011100	complemento a 1
	1111110111011101	complemento a 2

Análisis

- En la elección de un sistema de representación de números signados se deben tener en cuenta diversos aspectos:
  - ¿Qué tan sencillo resulta detectar el signo?
  - ¿Resultan equivalentes los rangos de representación para positivos y negativos?
  - ¿El cero tiene una representación unívoca?
  - ¿Qué tan eficiente resulta la implementación de las operaciones básicas y de la operación de complementación?

Análisis

- Analicemos los tres sistemas a la luz de los criterios recién introducidos:
  - La detección del signo es equivalente en los tres casos, consiste en inspeccionar el primer dígito
  - En relación a la simetría del rango, signo-magnitud y complemento a la base disminuida resultan simétricos, mientras que complemento a la base no
  - El cero tiene representación doble en signo-magnitud y en complemento a la base disminuida, pero en complemento a la base no
  - Resta analizar la eficacia de las operaciones

¿Preguntas?